Mathematik 11b 15/05/2010 rcs

Lösungen für die Übungen für die Klausur

(1) Länge: h Grundkreisdurchmesser: 2r

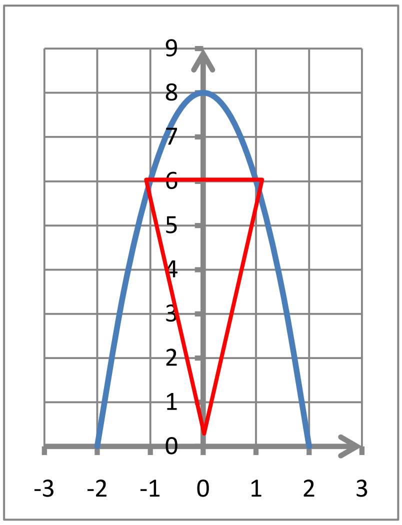
$100 = h + 2r \Leftrightarrow h = 100 - 2r$, dann ist $V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot (100 - 2r) = 100 \pi r^2 - 2 \pi r^3$.

$V'(r) = 200 \pi r - 6 \pi r^2$. r kann nur zwischen 0 und 100 liegen.

Ableitung gleich Null setzen: $0 = 200 \pi r - 6 \pi r^2 \Leftrightarrow r = 33{,}3333 \vee r = 0$.

Also ist r = 33,3333 cm, h = 33,3333 cm, V = 116355,2835 cm³.

(2) Wichtig ist: Durch das gleichschenklige Dreieck gibt es neben (0|0) noch die Eckpunkte (-x|f(x)) und (x|f(x)). Die y-Werte sind also jeweils gleich!



Die Fläche des Dreiecks ist $\frac{g \cdot h}{2}$.
Die Grundseite geht von –x bis x, also 2 · x!
Die Höhe ist genau der Wert f(x) bzw. f(-x).

Da $f(x) = y = 8 - 2x^2$ gilt:

$A(x) = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2x \cdot (8-2x^2)}{2} = \frac{16x - 4x^3}{2} = 8x - 2x^3$.

$A'(x) = 8 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} \vee x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$

Dann gilt: $P_1\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| \frac{16}{3}\right)$ und $P_2\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| \frac{16}{3}\right)$ und dann ist $A\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6{,}1584$.

(3)
(a) $f'(x) = 0{,}0034\,x - 0{,}18 = 0$, dann ist x = 52,9412.
(b) f(52,9412) = 5,3453

(4) x · y = 8, x + y soll möglichst klein werden.
$x \cdot y = 8 \Leftrightarrow y = 8/x$. $f(x) = x + 8/x$ $f'(x) = 1 - 8/x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}8284 \vee -2{,}8284$.
Letzteres geht nicht, da wir ja nun positive Zahlen haben sollen.
Wer sich klar macht, daß 2,8284 die Wurzel aus 8 ist, wird nicht lange brauchen, um zu erkennen, daß auch y = 2,8284 sein muß.

(5)

	$f(x) = ax^3$	$+ bx^2$	$+ cx$	$+ d$	
I.	$0 = 0$	$+ 0$	$+ 0$	$+ d$	$\Rightarrow d = 0$
II.	$-1 = a \cdot (-3)^3$	$+ b \cdot (-3)^2$	$+ c \cdot (-3)$	$+ d$	
III.	$0{,}5 = a \cdot (-2)^3$	$+ b \cdot (-2)^2$	$+ c \cdot (-2)$	$+ d$	
IV.	$-0{,}5 = a \cdot (-1)^3$	$+ b \cdot (-1)^2$	$+ c \cdot (-1)$	$+ d$	

Der TI spuckt bei richtiger Fütterung Werte aus, die folgende Funktion ergeben:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{4}x^2 + \frac{31}{12}x$$

(b) Als zusätzliche Bedingung gilt nun, daß f(x) im Punkt (0|0) auch die Steigung haben muß, die g(x) dort hat. Es ist $g'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$, dann ist g'(0) = 0,5.

Lösungen für die Übungen für die Klausur

Man nehme sich jetzt die neue Gleichung f(x) = $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, nutze die Voraussetzungen von (a) und die neue mit f '(0) = 0,5 und erhält dann:

$$f(x) = -\frac{25}{72}x^4 + \frac{17}{12}x^3 + \frac{77}{72}x^2 + \frac{1}{2}x$$

(6) f(x) = $\frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{4} + 4$

ID = IR. Nullstellen: x = -2 und x = 4. Hochpunkt bei (0|4), Tiefpunkt bei (4|0). Wendepunkt ist (2|2).

g(x) = $\frac{-2x^3}{4} - \frac{\frac{3}{2}x^2}{2} - \frac{9}{8}$

ID = IR, Nullstelle: x = -2,0404. Tiefpunkt (-1|-11/8), Hochpunkt (0|-9/8),
Wendepunkt ist (-0,5|-1,25).

(7) ***Diese Aufgabe sollte ohne Taschenrechner lösbar sein, sofern der Lehrer nicht Blödsinn hinschreibt!*** Der Graph einer Funktion zweiten(!) Grades f hat im Punkt P(1|-2) die Steigung – 4 und bei x = -1 die Steigung 8. Wo hat der Graph sein Maximum?

f(x) = ax² + bx + c
f '(x) = 2ax + b

I. -2 = a + b + c
II. -4 = 2a + b
III. 8 = -2a + b

II + III 4 = 2b ⇔ b = 2

in II -4 = 2a + 2 ⇔ -6 = 2a ⇔ a = -3

in I -2 = -3 + 2 + c ⇔ c = -1

Also ist f(x) = -3x² + 2x – 1 und f '(x) = -6x + 2 und 0 = -6x + 2 ⇔ x = 1/3 ergibt das Maximum bei (0,3333|-0,6667).