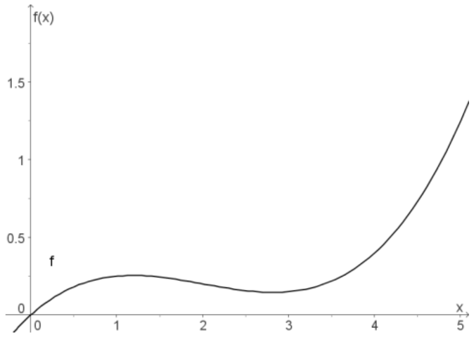
Rotationskörper-Aufgabe von 2008

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Spielfigur

Ein Metall verarbeitender Betrieb will eine Spielfigur in Serienproduktion herstellen. Diese Spielfigur wird in einer Fräsmaschine gefertigt, indem ein zylinderförmiges Stück Metall unter einem messerartigen Fräswerkzeug rotiert. Das Werkzeug bewegt sich dabei von links nach rechts mal höher, mal tiefer entlang einer in die Maschine eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt also für jeden Querschnitt der Spielfigur Ihren Radius an. Die entstehende waagerecht liegende Spielfigur wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende als Kopf der Figur oben und das rechte Ende als Fuß unten befindet.



a) Am Kopf der $5cm$ hohen Spielfigur ist der Radius mit $0cm$ am kleinsten, während er am Fußende mit $1{,}25cm$ am größten ist. Am Übergang vom Kopf zum Hals der Spielfigur bei $x = 2cm$ beträgt der Radius $0{,}2cm$. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganz-rationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Kopfes zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am Übergang vom Kopf zum Hals durch $f''(2) = 0$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

Die Maschine kann auch eine $5cm$ große Spielfiguren mit der Randfunktion g mit der Gleichung

$$g(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}27x^2 + 0{,}5x$$

herstellen.

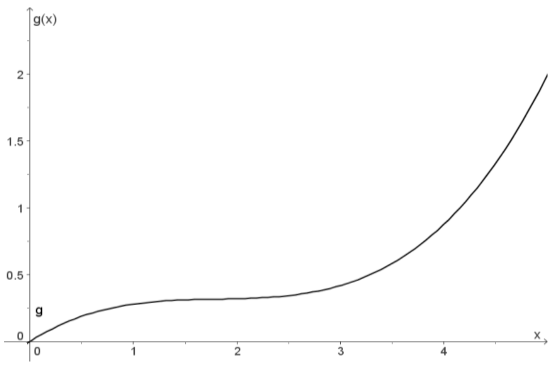
b) Skizzieren Sie den Graphen von g in seinem wesentlichen Verlauf, indem Sie den von Ihrem Rechner dargestellten Grafen in ein Koordinatensystem übertragen.
Erläutern Sie die Unterschiede zwischen den beiden Spielfiguren aus Teil a) und b).

c) Berechnen Sie den Radius der Spielfigur (mit der Randfunktion g) sowohl an ihrem Fußpunkt als auch an der Stelle $x = 2$.

d) Zeigen Sie, dass der Übergang vom Kopf zum Hals, d.h. der Wendepunkt, bei $x_W = 1{,}8$ liegt und berechnen Sie den Radius an dieser Stelle.

e) Der Betrieb möchte den Abfall bei der Herstellung der Spielfiguren abschätzen.
Ermitteln Sie das Volumen der Spielfigur.
Die Spielfiguren werden aus einem Metallzylinder mit einem Radius von $2cm$ und einer Länge von $5cm$ hergestellt. Bestimmen Sie den Abfall.
Vergleichen Sie die beiden Volumina miteinander.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
2a	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad ; \quad f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad ; \quad f''(x)=6ax+2b$ Drei vorgegebene Punkte liefern $f(0)=0$ und somit $d=0$, $f(5)=1,25=125a+25b+5c$ sowie $f(2)=0,2=8a+4b+2c$ Das Krümmungsverhalten ergibt $f''(2)=0=12a+2b$. Zu lösen bleibt das LGS $\begin{bmatrix} 1,25 & = & 125a+25b+5c \\ 0,2 & = & 8a+4b+2c \\ 0 & = & 12a+2b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & = & \frac{1}{20} \\ b & = & -\frac{3}{10} \\ c & = & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{20}x^3-\frac{3}{10}x^2+\frac{1}{2}x$.	2	6	
2b	Graph von g :  Der Radius am Hals nimmt im Vergleich zum Graphen aus Teil a) zu. Der Kopf der zweiten Spielfigur ist daher weniger ausgeprägt. Der Radius am Fußpunkt ist beim Graphen g ebenfalls größer als beim Graphen f . Die zweite Spielfigur hat daher einen größeren Fuß.	2	3	
2c	$g(5)=2$ und $g(2)=\frac{8}{25}=0,32$, also beträgt der Radius am Fußpunkt $2cm$ und an der Stelle $x=2$, also am Übergang vom Kopf zum Hals, $0,32cm$.	4		
2d	Für die Wendestelle muss gelten: $g''(x_W)=\frac{3}{10}x_W-0,54=0$, woraus $x_W=0,18$ folgt. Über die dritte Ableitung $g'''(x_W)=\frac{3}{10}\neq 0$ lässt sich nachweisen, dass an dieser Stelle ein Wendepunkt existiert. Der Radius berechnet sich zu $g(1,8)\approx 0,32$.	2	2	

Rotationskörper-Aufgabe von 2008

	Lösungsskizze	**Bewertung**		
		I	**II**	**III**
2e	$V_S = \pi \cdot \int_0^5 (0,05x^3 - 0,27x^2 + 0,5x)^2\, dx$ $= \pi \cdot \left[\frac{x^7}{2800} - \frac{9x^6}{2000} + \frac{1229x^5}{50000} - \frac{27x^4}{400} + \frac{x^3}{12} \right]_0^5 \approx 8,27$ Das Volumen der Spielfigur ist $8,27\,cm^3$ groß. $V_Z - V_S = [\pi \cdot 4 \cdot 5] - 8,27 = 62,83 - 8,27 = 54,56$ Das Volumen des Abfalls ist mit $54,56\,cm^3$ mehr als sechsmal so groß wie das der Spielfigur.		2	2
Verteilung der insgesamt 25 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**13**	**2**