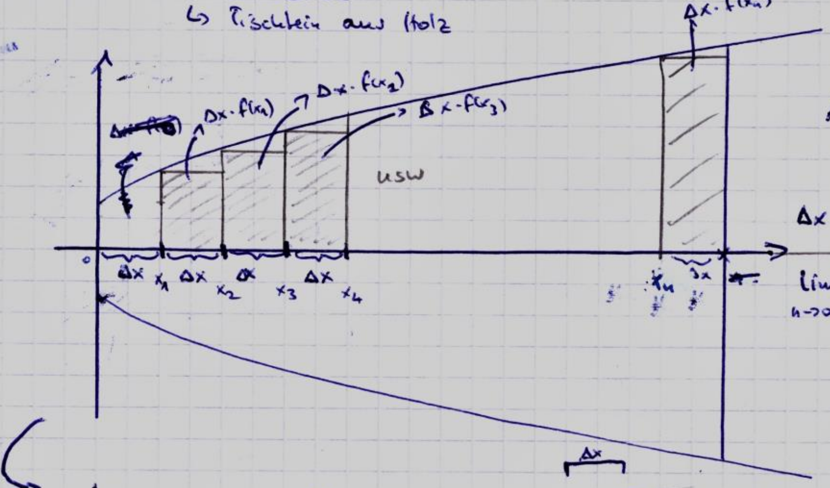
III. Rotationskörper

→ Volumen eines Zylinders → $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

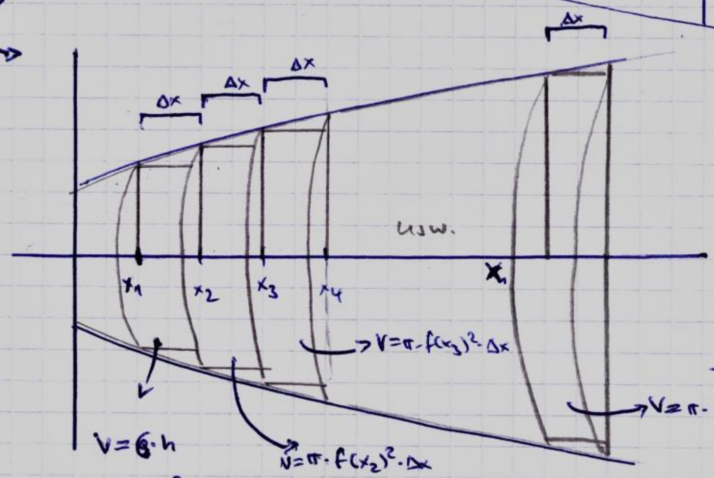
→ Problem: Was ist, wenn der Radius variiert?
- ↳ Karaffe aus Mensa
- ↳ Salzstreuer
- ↳ Tischbein aus Holz



$A_n = \Delta x \cdot x_1 + \Delta x \cdot x_2 + \Delta x \cdot x_3 + \dots + \Delta x \cdot x_{n-1}$

Δx kleiner werden lassen:

$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx$



$V_n = \pi \cdot f(x_1)^2 \cdot \Delta x + \pi \cdot f(x_2)^2 \cdot \Delta x + \dots + \pi \cdot f(x_n)^2 \cdot \Delta x$

vgl. oben: $V_n = \int_{x_1}^{x_n} \pi \cdot f(x)^2\,dx$

$V = G \cdot h$
$= \pi \cdot r^2 \cdot h$
$= \pi \cdot f(x_1)^2 \cdot \Delta x$

~~⇒ Die Funktion f sei auf [a~~

Rotiert die Fläche unter dem Graphen einer Funktion f über dem Intervall $[a,b]$ um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Sein Volumen V beträgt

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

IV. Beispiel: Ein Kerzenständer hat an der Seite die Form des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}$. Er ist 2 cm hoch, $0 \le x \le 2$.

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(\tfrac{1}{4}(x^2+4)\right) dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\tfrac{1}{4}x^2 + 1\right) dx = \pi \left[\tfrac{1}{12}x^3 + x\right]_0^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{12} \cdot 8 + 2 = 2\tfrac{2}{3} \cdot \pi = \cancel{26{,}389} \; 8{,}3776$$