Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

CAS

Sportler

1 Herzfrequenzmessung

Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei *gleichbleibender* Geschwindigkeit die Herzfrequenz gemessen. Die Abhängigkeit der Herzfrequenz von der Zeit kann modellhaft durch eine in $\mathbb{R}$ Funktion f mit

$f(t) = 180 - 100 \cdot e^{-0{,}5t}$ für $t \geq 0$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Minuten und $f(t)$ die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute.

a) **Berechnen** Sie die Herzfrequenz des Sportlers zum Startzeitpunkt und nach zwei Minuten nach diesem Modell.

Ermitteln Sie $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ und interpretieren Sie das Ergebnis für eine lange Laufzeit.

(4 BE)

b) **Zeigen** Sie, dass die Funktion F mit $F(t) = 180t + 200 \cdot e^{-0{,}5t}$ eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die gesamte Anzahl der Herzschläge des Sportlers seit dem Startzeitpunkt 1600 beträgt.

(3 BE)

c) Ein anderer Sportler startet den Lauf mit einer Herzfrequenz von 70 Herzschlägen pro Minute. Nach 3 Minuten hat er eine Herzfrequenz von 160 Herzschlägen pro Minute erreicht.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Angaben die Parameter a und b einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s der Form $s(t) = 190 - a \cdot e^{b \cdot t}$, die diesen Lauf des Sportlers für $t \geq 0$ modelliert, wobei t die Zeit in Minuten und s(t) die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute ist.

(4 BE)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion k mit $k(x) = 0{,}025x^3 - 0{,}75x^2 + 7{,}2x - 20{,}375$ und $x \in \mathbb{R}$.

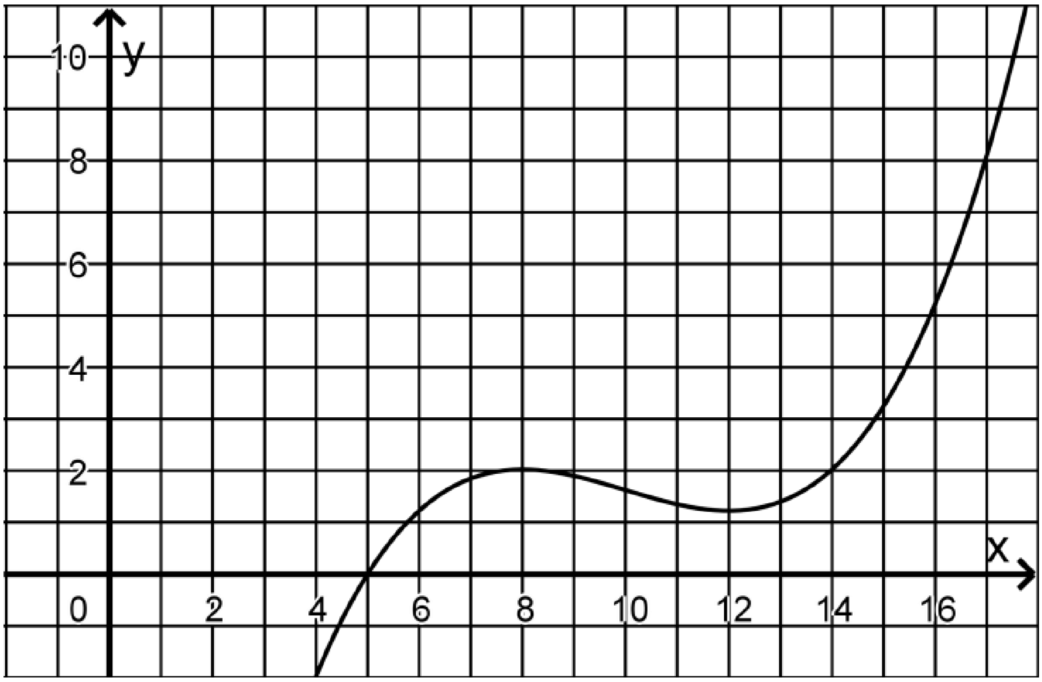


Abbildung 1

2 Laktatmessung

Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei *ansteigender* Geschwindigkeit jeweils die Konzentration sogenannter Laktate im Blut gemessen. Die Abhängigkeit der Laktatkonzentration von der Geschwindigkeit kann für $8{,}5 \leq x \leq 17{,}5$ modellhaft durch die Funktion k beschrieben werden. Dabei ist x die Geschwindigkeit des Sportlers in Kilometer pro Stunde und $k(x)$ die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter $\left(\frac{\text{mmol}}{\text{l}}\right)$.

a) **Bestimmen** Sie im Modell mit Hilfe der Abbildung 1 die Geschwindigkeit, ab der die Laktatkonzentration ansteigt, sowie die Geschwindigkeit, bei der die Laktatkonzentration $3{,}25\ \frac{\text{mmol}}{\text{l}}$ überschreitet.

(2 BE)

b) **Berechnen** Sie die Änderung der Laktatkonzentration bei einer Geschwindigkeit von $11{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Die Laktatkonzentration nimmt zwischen den Geschwindigkeiten $8{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $12{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ab.

Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Geschwindigkeit die Laktatkonzentration im Modell am stärksten abnimmt.

(6 BE)

3 Geraden durch den Wendepunkt

Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes $W\left(10\,|\,\frac{13}{8}\right)$. Betrachtet werden die Geraden, die durch den Wendepunkt W verlaufen.

a) Gegeben ist die Gerade g mit $g(x)=\frac{13}{40}x-\frac{13}{8}$ und $x\in\mathbb{R}$.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion g durch den Wendepunkt W verläuft.

Zeichnen Sie die Gerade g in die Abbildung 1 ein.

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $k(x)-g(x)=0$

und **beschreiben** Sie, wie man diese Lösungen grafisch ermitteln kann.

(6 BE)

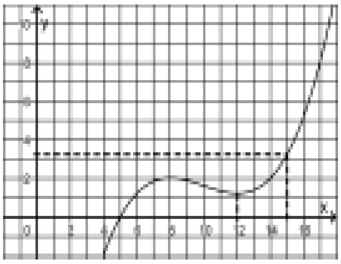
b) **Begründen** Sie ohne zu rechnen, dass $\frac{1}{15-5}\cdot\int_5^{15}k(x)dx=k(10)$ gilt.

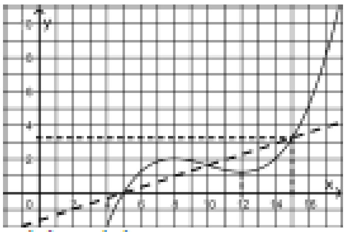
(4 BE)

c) Eine Gerade durch W mit negativer Steigung hat mit dem Graphen von k keinen weiteren Punkt gemeinsam.

Ermitteln Sie alle Steigungen, die diese Gerade haben könnte.

(3 BE)

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
1				
a)	$f(0)=80$ $\qquad f(2)\approx 143$ Die Ergebnisse sind jeweils die Herzfrequenz in Herzschlägen pro Minute. $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=180$. Für eine große Laufzeit nähert sich die Herzfrequenz 180 Herzschlägen pro Minute an.	2	2	
b)	$F'(t)=180+(-0{,}5)\cdot 200\cdot e^{-0{,}5t}=180-100\cdot e^{-0{,}5t}=f(t)$ $\int\limits_0^{10} f(t)\,dt=1600 \;\Rightarrow\; t_1\approx -5{,}24\notin D_f \;\wedge\; t_2\approx 10$ In den ersten 10 Minuten beträgt die gesamte Anzahl der Herzschläge 1600.		3	
c)	$s(0)=190-a\cdot e^{b\cdot 0}=70\Rightarrow a=120$. $s(3)=190-120\cdot e^{b\cdot 3}=160\Rightarrow b=\frac{\ln(0{,}25)}{3}\approx -0{,}46$		4	
2				
a)	 Ab $12\frac{km}{h}$ steigt die Laktatkonzentration an, bei $15\frac{km}{h}$ überschreitet die Laktatkonzentration $3{,}25\frac{mmol}{h}$.	2		
b)	$k'(x)=0{,}075x^2-1{,}5x+7{,}2$. Aus $k'(11)=-0{,}225$ folgt, dass bei einer Geschwindigkeit von $11\frac{km}{h}$ die Laktatkonzentration um $0{,}225\frac{mmol}{h}$ pro $\frac{km}{h}$ abnimmt. $k''(x)=0{,}15x-1{,}5$ und $k'''(x)=0{,}15$. Aus $k''(x)=0$ folgt $x=10$. Aus $k''(10)=0\wedge k'''(10)=0{,}15\neq 0$ folgt, dass sich die Laktatkonzentration bei einer Geschwindigkeit von $10\frac{km}{h}$ am schnellsten abnimmt.		6	

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3				
a)	Die Punktprobe ergibt $\frac{13}{40}\cdot 10-\frac{13}{8}=\frac{13}{8}$; also liegt W auf g.  $k(x)-g(x)=0 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=10,\ x_3=15$. Die Lösungen der Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von k und g.	6		
b)	Der linke Term der Gleichung bestimmt den mittleren Funktionswert von k im Intervall $5\leq x\leq 15$ und aufgrund der Symmetrie des Graphen von k bezüglich seines Wendepunktes stellt der Funktionswert des Wendepunktes ebenfalls den Mittelwert der Funktionswerte von k dar.			4
c)	$k'(10)=-0{,}3$. Unter Berücksichtigung des Graphen von k ergibt sich für die Steigungen m der Geraden g durch den Wendepunkt $m\in\left]-\infty;-0{,}3\right]$.			3
Verteilung der insgesamt 32 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		10	15	7